

الماضرة السابعة:

1- يفرض لدينا حجة ما α صلياً أو صوفياً بتوزيع احتمالي
وسيله المجهول θ ولنا ف من هذا الحجة عينة عشوائية
من θ عندها α يباد بحال الثقة للوسيلة θ من اجل العينة
المأخوذة سوف نتبع بالجدول

2- سوف نثبت عن كية محورية (الكية المحورية هي كية
تقريباً الوسيط وتوزيع الاحتمالي معلوم والكيات المضافة اليها
معلومة)

3- نذكر هذه الكية بين كيتين معلومتين من جدول توزيع الكية
المحورية باحتمال قدره α اقل من α ندعو به حال الثقة
منه α نؤخذ صغيرة وندعى بمستوى الكية α من الجدول
 $\alpha = 0.05, 0.02, 0.01$

و اذا اذ اقل α فيكون ان نعلم α اذ الكية α جميع α
ومن ثم نخرج عملية العزل للوسيط θ لنحصل على α صلياً
والا محيية α يكون α $\alpha = 0.05, 0.02, 0.01$
عندها ندعو بحال [α] بحال الثقة المطلوب α حيث

الكية α معلوم α كيتين نظري

مثال 1- يفرض لدينا حجة ما α صلياً أو صوفياً $X \sim N(\mu, \sigma)$ بحيث
من معلوم ولنا ف من هذا الحجة عينة عشوائية حجم n معلومة
حيث \bar{X} الوسط الى ابيط الموافقة لينة العينة \bar{X} نتخذ
بحال الثقة للوسيط μ من α نؤخذ أهمية α معلوم
الحال α سوف يكون عن كية محورية وهذه الكية هي

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\sigma/\sqrt{n}$$

ومن ثم نضرب هذه الكمية بين كميتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية بافتقار قدره $1-\alpha$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = F(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - F(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

$$= 2F(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - 1$$

والتي يمكننا في التوزيع الطبيعي العكسي التحقق:

$$P(Z < Z_{\alpha}) = \alpha$$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 2P(Z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - 1$$

$$= 2(1-\frac{\alpha}{2}) - 1 = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(\underbrace{-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{L_1} \leq \mu \leq \underbrace{-\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{L_2}) = 1-\alpha$$

L_1

L_2

حينئذ حال الثقة المطلوب:

$$[L_1, L_2] = \left[-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

ويمكن أن نرى هذا المجال مجالاً عشوائياً لأنه كل الاختلاف حجم العينة يقل على مجال ثقة كبير وسوف نعود إلى هذا المخطط الآتية لتقدير μ والذي نزاله بالرمز:

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}$$

بذلك يمكن أن يطلب منا: هو حجم العينة اللازم لتقدير μ بحيث يكون الخطأ المطلق الآتية أصغر أو يساوي ϵ صغير موجب معلوم ذلك: $\epsilon \leq E \Leftrightarrow \epsilon^2 \leq E^2$
 مضروباً برقم n $\Rightarrow n \epsilon^2 \leq E^2$
 $\Rightarrow n \geq \frac{s^2}{\epsilon^2} \Rightarrow n \geq \left(\frac{s}{\epsilon} \right)^2$

إذا كان المجتمع المطلق غير طبيعي وحجم العينة أكبر من 30 فيمكن أن نقره من المجتمع الطبيعي.

مثال: بفرض لدينا مجتمع إحصائي طبيعي (أ) $\mu = 10$ و $\sigma = 5$ ولنا ثقة 95% عينة عشوائية حجمها 50 $n = 50$ حيث: $\bar{x} = 12$ $s = 5$ نريد إيجاد الثقة للوسيط μ مع مستوى الثقة 0.05 $\alpha = 0.05$.
 ثم نحسب الخطأ المطلق الآتية وفي تقدير μ وجدنا حجم العينة اللازم من أجل ذلك يمكن الخطأ المطلق الآتية أصغر أو يساوي $\epsilon = 0.04$ $\epsilon = 0.04$.

الحل: من أجل إيجاد مجال الثقة للوسيط μ سوف نستخدم طريقة أخرى وهذه الطريقة هي (أ) $\mu = 10$ و $\sigma = 5$ $\bar{x} = 12$ $s = 5$ $n = 50$ $\alpha = 0.05$ $\epsilon = 0.04$ $\Rightarrow n \geq \left(\frac{s}{\epsilon} \right)^2$
 ومن ثم نحصل هذه القيمة بين $\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}$ معلومين من توزيع القيمة الحرجة بافتراض قدره 0.95 أي أن:

$$Z_{0,975} = 1,96$$

ومن ثم نكتب عملية العزل للموسم μ لنجد ذلك:

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha = 0,95$$

أي ذلك مجال الثقة هو:

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] =$$

$$\alpha = 0,05, \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$$

$$\Rightarrow \left[12 - \frac{4}{5} (1,96), 12 + \frac{4}{5} (1,96) \right] = [,]$$

الخطأ المطلق الأقصى هو:

$$e = \left| \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right| = \left| \bar{X} \pm \frac{4}{5} (1,96) \right|$$

$$n \geq \frac{\sigma^2 Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{e^2} \Rightarrow n \geq \frac{16}{(0,04)^2} (1,96)^2$$

[2] إيجاد مجال الثقة للموسم μ في مجتمع (مهاجرين)

طبيعي فيه σ^2 معروف:

بفرض لدينا عينة أولية عشوائية X من مجتمع $N(\mu, \sigma^2)$ معلوم،
ولنا أن عملية عينة عشوائية حجم n بحيث \bar{X} هو الوسط الحسابي
الموافق لهذه العينة و s^2 هو التباين لهذه العينة و s هو التباين
المعياري لهذه العينة ولتوجد مجال الثقة للموسم μ في مستوى

أهمية α معلوم. أولاً نثبت عن كمية محورية وهذه الكمية

هي: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

كون μ مجهول ومن ثم في هذه الكمية بين كيتين معلومتين

من جدول توزيع الكمية المحورية بافتراض α ما ذكره +

$P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1 - \alpha$

بذلك كل T بما يساوي:

$\Rightarrow P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1 - \alpha$

أيضاً نخرج معادلة النهاية للـ μ :

$\Rightarrow P(-\frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1 - \alpha$

$\Rightarrow P(\underbrace{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}_{L_1} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}_{L_2}) = 1 - \alpha$

وبالتالي جفافاً مجال التقاطع من هذا المجال هو:

$[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)]$

$L_2 - L_1 = 2 \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

الخطأ المطلق الأقصى $e = \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

ويكفي أن يلجأ منا هو حجم العينة اللازم من أجل أن يكون الخطأ المطلق الأقصى أصغر أو يساوي من أجل أن يكون e

مفترضه $e \leq e \Rightarrow e \leq e$

$$\Rightarrow \left[\frac{S^2}{n} t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq \Sigma^2 \Rightarrow n \geq \frac{S^2}{\Sigma^2} t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \right]$$

مثال: بفرض أن لدينا عينة من صائغ (طوبى) $\mu = 10.5$ و $X \sim N$ ولنا أن

عينة عشوائية حجم $n = 20$ $\Sigma = 10.5$ و $S = 3$

عندئذ نريد إيجاد مجال الثقة للمتوسط μ بمستوى أهمية α

$\alpha = 0.05$ أي $\alpha/2 = 0.025$ معلوم $t_{0.975}(19)$

الحل: من أجل إيجاد مجال الثقة للمتوسط μ حيث Σ مجهول

سوف نستخدم كمية محورية وهذه الكمية هي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(19)$$

بذلك نعرف هذه الكمية بين كيتين معلومتين من جدول توزيع

الكمية المحورية بأهمال قدره 0.975 ثم نكتب عملية العمل للمتوسط μ لفضل μ بالصيغ:

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(19), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(19) \right]$$

بغضن كلاً ما بار أو

$$= \left[10.5 - \frac{3}{\sqrt{20}} (2.093), 10.5 + \frac{3}{\sqrt{20}} (2.093) \right]$$

بأهمال جال الثقة؟

$$L_2 L_1 = \frac{2}{\sqrt{n}} S t_{0.975}(19)$$

بالتبويض نصل إلى المطلوب

$$e = \left| \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(19) \right|$$

بغضن كلاً ما بار μ بغير Σ القيمة

مبارك مثالي

$$n > \frac{S^2}{\epsilon^2} \frac{1}{0.0175} (1.9)^2$$

3] إيجاد مجال الثقة للفروق بين متوسطين حقيقيين إحصائيين

طبيين في كل من التباين معلوم.

بفرض لدينا حقيقيين إحصائيين طبيعيين كل منهما من التوزيع

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad ? \text{ معلومة}$$

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad ? \text{ معلومة}$$

ولنوجد مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ على مستوى أهمية α معلومة

لايجاد مجال الثقة المطلوب سوف نبحث عن كمية حرجية

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

هذه الكمية هي $N(0, 1)$ حجم العينة الكلي و m الحجم المأخوذ من العينة الثانية

ونفرض هذه الكمية بين كيتين معلومتين بأحقا القدر $1 - \alpha$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \leq \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}})$$

$$\Rightarrow P(\bar{X} - \bar{Y} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}})$$

$$[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}]$$